घाताङ्कः अथ च घातः

अध्यायः 13

13.1 भूमिका

किं भवन्तः जानन्ति यत् पृथिव्याः द्रव्यमानं कियद् अस्ति ?
एतत् 5,970,000,000,000,000,000,000,000 इति किलोग्राममितम् अस्ति।
किं भवन्तः एतां सङ्ख्यां पठितुं शक्नुवन्ति ?
अरूणग्रहस्य द्रव्यमानम् 86,800,000,000,000,000,000,000,000 इति किलोग्रामपरिमितम् अस्ति।
अरूणपृथिव्योर्मध्ये कस्य द्रव्यमानम् अधिकम् अस्ति ?
सूर्यशनिग्रहयोः मध्यवर्तिनी दूरता 1,433,500,000,000 मीटरमिता अस्ति अथ च अरूणशन्योर्मध्ये 1,439,000,000,000 मीटरमिता दूरता अस्ति। किं भवन्तः इमाः सङ्ख्याः पठितुं शक्नुवन्ति ? एतयोर्मध्ये कतमा दूरता लघ्वी अस्ति ?
एतादृशीनां दीर्घसङ्ख्यानां पठनम् अधिगमनम् अथ च तुलना इत्यादि कठिनकार्यम् अस्ति । इमाः सङ्ख्याः सारल्येन पठितुम् अधिगन्तुम् आसां च तुलनार्थं वयं घाताङ्कानां प्रयोगं कुर्मः। अध्यायेऽस्मिन् वयं घाताङ्कानां विषये अधिगमिष्यामः तथा च एतद् अपि अधिगमिष्यामः यत् एषां प्रयोगः कथं क्रियते।

13.2 घाताङ्कः

वयं घाताङ्कानां प्रयोगं कृत्वा विशाल-सङ्ख्याः सङ्क्षिप्तरूपेण लेखितुं शक्नुमः। अधोलिखितं पश्यन्तु
$10,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$
10^4 इति सङ्क्षिप्त-सङ्केतः $10\times10\times10\times10$ इति गुणनफलं व्यक्तीकरोति। अत्र 10 आधारः इति कथ्यते अथ च 4 घाताङ्कः इति कथ्यते। 10^4 इत्येतद् दशानाम् उपरि घातः चत्वारः इति अथवा केवलं दशानां चतुर्थः घातः इति पठ्यते।
10^4 इत्येतद् अयुतस्य (10,000) घाताङ्कीय-रूपम् इति कथ्यते।

अनेन प्रकारेण वयं सहस्रम् अपि दशानां घातरूपेण व्यक्तीकर्तुम् अर्हामः। यतोहि सहस्रम् (1,000) दशानाम् त्रिगुणितम् अस्ति अतः
$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$ इति अस्ति।
अत्र पुनः 10^3 इति सङ्ख्या सहस्रस्य (1,000) घाताङ्कीयरूपम् अस्ति।
अनेन प्रकारेण एव $1,00,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$ इति अस्ति।
अर्थात् 10^5 इति सङ्ख्या लक्षस्य (1,00,000) घाताङ्कीय-रूपम् अस्ति। एतयोः

उदाहरणयोः आधारः दश (10) अस्ति। 10^3 इत्यत्र घाताङ्कः 3 तथा च 10^5 इत्यत्र घाताङ्कः 5 अस्ति। वयं सङ्ख्याः विस्तारित-रूपेण अथवा प्रसारित-रूपेण लेखितुम् 10, 100, 1000 इत्यादीनां सङ्ख्यानां प्रयोगं कृतवन्तः।

उदाहरणार्थम् $47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$ इति अस्ति।

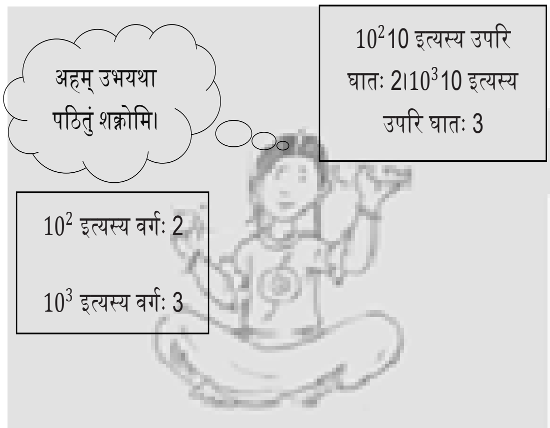
एतत् $4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10 + 1$ इत्यनेन रूपेण लेखितुं शक्यते।

अनेन प्रकारेण अधोलिखित-सङ्ख्याः अपि लेखितुं प्रयासं कुर्वन्तु -

172, 5642, 6374

उपर्युक्तेषु उदाहरणेषु वयं ताः सङ्ख्याः दृष्टवन्तः यासाम् आधारः दश (10) अस्ति। परन्तु आधारः तु कापि सङ्ख्या भवितुम् अर्हति। उदाहरणार्थम् $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3$^4 इति रूपेण लेखितुं शक्यते। अत्र त्रयः (3) आधारः घाताङ्कः च चत्वारः अस्ति।

केषाञ्चित् घातानां विशिष्ट-नामानि सन्ति। उदाहरणार्थम्



10^2 यत् 10 इत्यस्य उपरि यः घातः 2 इति अस्ति तत् दशानां वर्गः इति अपि पठ्यते।

10^3 दशसङ्ख्यायाः उपरि यः घातः 3 अस्ति सः दशानां घनः इति अपि पठ्यते।

किं भवन्तः सूचयितुं शक्नुवन्ति यत् 5^3 (5 इत्यस्य घनः) इत्यस्य कः अर्थः ?

5^3 इत्यस्य अर्थः पञ्चानाम् आत्मना त्रिवारं गुणनम् अस्ति अर्थात् $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

अतः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् 125 इति सङ्ख्या पञ्चानां तृतीय-घातः अस्ति।

5^3 इत्यत्र आधारः तथा च घाताङ्कः किम् अस्ति ?

अनेन प्रकारेण $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ इति अस्ति यः 2 इत्यस्य पञ्चमः घातः अस्ति।

2^5 इत्यत्र 2 इति आधारः अस्ति अथ च 5 इति घाताङ्कः अस्ति।

अनेन विधिना $243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$

$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$

$625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$

भवन्तः सङ्क्षिप्तरूपेण लेखनस्य एतं विधिं तदापि प्रयोक्तुं शक्नुवन्ति यदा आधारः एकः ऋणात्मकपूर्णाङ्कः भवेत्। -2^3 इत्यस्य कः अर्थः ?

एतत् $-2^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$ इति अस्ति।

किम् $-2^4 = 16$ इति अस्ति ? अस्य अवेक्षणं कुर्वन्तु।

आयान्तु अधुना कस्याश्चिदपि निश्चितसङ्ख्यायाः स्थाने कामपि a इति सङ्ख्याम् आधाररूपेण स्वीकुर्मः अथ च सङ्ख्याम् अधोलिखितरूपेण लिखामः -

प्रयासं कुर्वन्तु

एतादृशानि पञ्च अन्योदाहरणानि यच्छन्तु यत्र काचित् सङ्ख्या घाताङ्कीयरूपेण व्यक्तीक्रियते। प्रत्येकस्यां स्थितौ घाताङ्कस्य आधारस्य च परिज्ञानं कुर्वन्तु।

$a \times a = a^2$ (एतत् a इत्यस्य वर्गः अथवा a इत्यस्य उपरि घातः 2 इति पठ्यते)

$a \times a \times a = a^3$ (एतत् a इत्यस्य घनः अथवा a इत्यस्य उपरि घातः 3 इति पठ्यते)

$a \times a \times a \times a = a^4$ (एतत् a इत्यस्य उपरि घातः 4 अथवा a इत्यस्य चतुर्थः घातः इति पठ्यते)

$a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^7$ (एतत् a इत्यस्य उपरि घातः 7 अथवा a इत्यस्य सप्तमः घातः इति पठ्यते) इत्यादि।

$a \times a \times a \times b \times b$ इति a^3 b^2 इत्यनेन रूपेण व्यक्तीकर्तुं शक्यते (अस्य पठनम् a इत्यस्य घनः गुणितः b इत्यस्य वर्गः इति रूपेण क्रियते)।

$a \times a \times b \times b \times b \times b$ इति a^2 b^4 इत्यनेन रूपेण व्यक्तीकर्तुं शक्यते (अस्य पठनम् a इत्यस्य वर्गः गुणितः b इत्यस्य उपरि चतुर्थः घातः इत्यनेन रूपेण क्रियते)।

प्रयासं कुर्वन्तु

व्यक्तीकुरूत :

(i) 729 इत्येतम् 3 इत्यस्य घातरूपेण

(ii) 128 इत्येतम् 2 इत्यस्य घातरूपेण

(iii) 343 इत्येतम् 7 इत्यस्य घातरूपेण

उदाहरणम् 1 256 इति सङ्ख्याम् 2 इत्यस्य घातरूपेण व्यक्तीकुरूत।

समाधानम् $256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ इति प्राप्नुमः।

अतः वयं वक्तुं शक्नुमः $256 = 2^8$ इति।

उदाहरणम् 2 2^3 तथा च 3^2 इति एतयोः मध्ये कः बृहत्तरः अस्ति ?

समाधानम् $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ इति एवञ्च $3^2 = 3 \times 3 = 9$ इति प्राप्नुमः।

यतोहि $9 > 8$ इति अस्ति अतः 3^2 इति 2^3 इत्यस्माद् गुरुः अस्ति।

उदाहरणम् 3 8^2 तथा च 2^8 इति एतयोः मध्ये कः गुरूतरः अस्ति ?

समाधानम् $8^2 = 8 \times 8 = 64$

$2^8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$ इति अस्ति।

स्पष्टतया $2^8 > 8^2$ इति अस्ति।

उदाहरणम् 4 a^3 b^2, a^2 b^3, b^2 a^3 तथा च b^3 a^2 इति प्रसारितरूपेण लिखन्तु। किम् एतानि सर्वाणि समानानि सन्ति ?

समाधानम्

$a^3\,b^2 = a^3 \times b^2$
$= (a \times a \times a) \times (b \times b)$
$= a \times a \times a \times b \times b$

$a^2\,b^3 = a^2 \times b^3$
$= a \times a \times b \times b \times b$

$b^2\,a^3 = b^2 \times a^3$
$= b \times b \times a \times a \times a$

$b^3\,a^2 = b^3 \times a^2$
$= b \times b \times b \times a \times a$

अवधानं कुर्वन्तु यत् a^3 b^2 एवञ्च a^2 b^3 इति पदयोः स्थितौ a तथा च b इत्यनयोः घातौ भिन्नौ स्तः।

अनेन प्रकारेण a^3 b^2 एवञ्च a^2 b^3 इति भिन्नपदे स्तः।

अस्माद् विपरीतम् a^3 b^2 एवञ्च b^2 a^3 इतिसमाने (एकम् एव) स्तः यतोहि a तथा च b इत्यनयोः घातौ समानौ स्तः। गुणनखण्डानां क्रमेण कश्चन प्रभावः नैव जायते।

अनेन प्रकारेण $a^3\,b^2 = a^3 \times b^2 = b^2 \times a^3 = b^2\,a^3$ इति अस्ति।

अनेन प्रकारेण a^2 b^3 एवञ्च b^3 a^2 अपि समाने स्तः।

उदाहरणम् 5 अधोलिखित-सङ्ख्याः अभाज्यगुणनखण्ड-घातानां गुणनफलस्य रूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु

(i) 72 (ii) 432 (iii) 1000 (iv) 16000

समाधानम् (i) $72 = 2 \times 36 = 2 \times 2 \times 18$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 9$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

अनेन प्रकारेण $72 = 2^3 \times 3^2$ (इष्टाभाज्य-गुणनखण्डानां घातानां गुणनफल-रूपम्)

(ii) $432 = 2 \times 216 \quad = 2 \times 2 \times 108 = 2 \times 2 \times 2 \times 54$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 27 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

अथवा $432 = 2^4 \times 3^3$ (इष्टं रूपम्)

(iii) $1000 \quad = 2 \times 500 = 2 \times 2 \times 250 = 2 \times 2 \times 2 \times 125$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 25 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

अथवा $1000 \quad = 2^3 \times 5^3$

> अतुलः इदम् उदाहरणम् अधोलिखितविधिना साधयितुम् इच्छति
>
> $1000 = 10 \times 100 \quad = 10 \times 10 \times 10$
>
> $= (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$ (यतोहि$10 = 2 \times 5$)
>
> $= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$
>
> अनेन $\quad 1000 \quad = 2^3 \times 5^3$
>
> किम् अतुलस्य विधिः उचितः अस्ति ?

(iv) $16{,}000 = 16 \times 1000 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 1000 = 2^4 \times 10^3$ (यतोहि $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$)

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5) = 2^4 \times 2^3 \times 5^3$

(यतोहि$1000 \quad = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$)

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5)$

अथवा $\quad 16{,}000 \quad = 2^7 \times 5^3$

उदाहरणम् 6 निम्नलिखितानां मानं ज्ञातुं प्रयासं कुरूत।

$(1)^5, (-1)^3, (-1)^4, (-10)^3, (-5)^4$

> (-1) विषमसङ्ख्या $= -1$
>
> (-1) समसङ्ख्या $= +1$

समाधानम्

(i) अस्माकं पार्श्वे अस्ति $(1)^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

यथार्थतः 1 इत्यस्य कश्चिदपि घातः 1 इत्यस्य समानः एव भवति।

(ii) $(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times (-1) = -1$

(iii) $(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times 1 = 1$

भवन्तः अस्य अवेक्षणं कर्तुं शक्नुवन्ति यत् (-1) इत्यस्य कश्चिदपि विषमघातः (-1) इत्यस्य समानः एव भवति अथ च (-1) इत्यस्य कश्चिदपि समघातः $(+1)$ इत्यस्य समानः एव भवति।

(iv) $(-10)^3 = (-10) \times (-10) \times (-10) = 100 \times (-10) = -1000$

(v) $(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 25 \times 25 = 625$

प्रश्नावली 13.1

1. अधोलिखितानां मानानि ज्ञातुं प्रयासं कुर्वन्तु -

   (i) 2^6 (ii) 9^3 (iii) 11^2 (iv) 5^4

2. अधोलिखितान् घाताङ्कीयरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु -

   (i) $6 \times 6 \times 6 \times 6$ (ii) $t \times t$ (iii) $b \times b \times b \times b$ (iv) $5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$

   (v) $2 \times 2 \times a \times a$ (vi) $a \times a \times a \times c \times c \times c \times c \times d$

3. अधोलिखित-सङ्ख्यासु प्रत्येकं सङ्ख्यां घाताङ्कीय-सङ्केतरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु -

(i) 512 (ii) 343 (iii) 729 (iv) 3125

4. अधोलिखितेषु प्रत्येकस्मिन् भागे यत्र कुत्रापि सम्भवं स्यात् दीर्घसङ्ख्यां परिचिन्वन्तु -

(i) 4^3 तथा च 3^4 (ii) 5^3 तथा च 3^5 (iii) 2^8 तथा च 8^2

(iv) 100^2 तथा च 2^{100} (v) 2^{10} तथा च 10^2

5. अधोलिखितेषु एकैकं तेषाम् अभाज्य-गुणनखण्डानां घातीय-गुणनफल-रूपेण व्यक्तं कुर्वन्तु -

(i) 648 (ii) 405 (iii) 540 (iv) 3,600

6. सरलीकुरूत -

(i) 2×10^3 (ii) $7^2 \times 2^2$ (iii) $2^3 \times 5$ (iv) 3×4^4

(v) 0×10^2 (vi) $5^2 \times 3^3$ (vii) $2^4 \times 3^2$ (viii) $3^2 \times 10^4$

7. सरलीकुरूत -

(i) $(-4)^3$ (ii) $(-3) \times (-2)^3$

(iii) $(-3)^2 \times (-5)^2$ (iv) $(-2)^3 \times (-10)^3$

8. अधोलिखित-सङ्ख्यानां तुलनां कुरूत -

(i) 2.7×10^{12} ; 1.5×10^8 (ii) 4×10^{14} ; 3×10^{17}

13.3 घाताङ्कानां नियमाः

13.3.1 समानाधाराणां घातानां गुणनम्

(i) आयान्तु $2^2 \times 2^3$ इत्यस्य परिकलनं कुर्मः

$$2^2 \times 2^3 = (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 2^{2+3}$$

अवधानं कुर्वन्तु यत् 2^2 एवञ्च 2^3 इत्यत्र आधारः एकः एव अस्ति अर्थात् समानः अस्ति तथा च 2 एवञ्च 3 इत्यनयोः घाताकाङ्कयोः योगः 5 अस्ति।

(ii) $(-3)^4 \times (-3)^3 = [(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)] \times [(-3) \times (-3) \times (-3)]$

$$= (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$$
$$= (-3)^7$$
$$= (-3)^{4+3}$$

पुनः अवधानं कुर्वन्तु यत् अत्र आधारः एकः एव अस्ति तथा च घाताङ्कानां योगः 4 +3= 7 इति अस्ति।

(iii) $a^2 \times a^4 = (a \times a) \times (a \times a \times a \times a)$

$$= a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$$

(टिप्पणी - आधारः एकः एव अस्ति तथा च घाताङ्कानां योगः $2 + 4 = 6$ इति अस्ति ।)

अनेन प्रकारेण सत्यापितं कुर्वन्तु यत् :

$4^2 \times 4^2 = 4^{2+2}$

$3^2 \times 3^3 = 3^{2+3}$

किं भवन्तः मञ्जूषायाम् उपयुक्तसङ्ख्यां लेखितुं शक्नुवन्ति ?

$(-11)^2 \times (-11)^6 = 11^{\square}$

$b^2 \times b^3 = b^{\square}$ (ध्यानं यच्छन्तु यत् आधारः एकः एव अस्ति तथा च b कश्चन शून्येतर-पूर्णाङ्कः अस्ति) ।

प्रयासं कुर्वन्तु

सरलीकृत्य घाताङ्कीय-रूपेण लिख्यताम्

(i) $2^5 \times 2^3$

(ii) $p^3 \times p^2$

(iii) $4^3 \times 4^2$

(iv) $a^3 \times a^2 \times a^7$

(v) $5^3 \times 5^7 \times 5^{12}$

(vi) $(-4)^{100} \times (-4)^{20}$

$c^3 \times c^4 = c^{\square}$ (c कश्चिद्शून्येतर पूर्णाङ्कः अस्ति)।

$d^{10} \times d^{20} = d^{\square}$

इतः वयं व्यापकरूपेण एतद् वक्तुं शक्नुमः यत् शून्येतरस्य a इति पूर्णाङ्कस्य कृते $a^m \times a^n = a^{m+n}$ इति भवति यत्र m तथा च n इति पूर्णाङ्कसङ्ख्ये स्तः।

अवधानम्

$2^3 \times 3^2$ इत्यस्मिन् विचारं कुर्वन्तु।

किं अत्र घाताङ्कान् योजयितुं शक्नुवन्ति ? न ! किं भवन्तः सूचयितुं शक्नुवन्ति 'किमर्थम् इति ?'

2^3 इत्यस्य आधारः 2 इति अस्ति तथा च 3^2 इत्यस्य आधारः 3 इति अस्ति। आधारः एकः समानः नास्ति।

13.3.2 समानाधारवतां घातानां विभाजनम्

आयान्तु $3^7 \div 3^4$ इति सरलीकुर्मः।

$$3^7 \div 3^4 = \frac{3^7}{3^4} = \frac{3\times3\times3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3}$$

$$= 3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 3^{7-4}$$

अनेन प्रकारेण $3^7 \div 3^4 = 3^{7-4}$

(अवधानं कुर्वन्तु 3^7 एवञ्च 3^4 इत्यनयोः आधारः एकः एव अस्ति अन्यच्च $3^7 \div 3^4 = 3^{7-4}$ इति जायते।)

अनेन प्रकारेण $5^6 \div 5^2 = \frac{5^6}{5^2} = \frac{5\times5\times5\times5\times5\times5}{5\times5}$

$$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 5^{6-2}$$

अथवा $5^6 \div 5^2 = 5^{6-2}$ इति अस्ति।

कल्पनां कुर्वन्तु यत् a इति कश्चित् शून्येतरः पूर्णाङ्कः अस्ति। तदानीम्

$$a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = \frac{a\times a\times a\times a}{a\times a} = a\times a = a^2 = a^{4-2}$$

$a^4 \div a^2 = a^{4-2}$

किम् अधुना भवन्तः सद्यः एव उत्तरं दातुं शक्नुवन्ति ?

$10^8 \div 10^3 = 10^{8-3} = 10^5$

$7^9 \div 7^6 = 7^{\square}$

$a^8 \div a^5 = a^{\square}$

b एवञ्च c इति शून्येतरपूर्णाङ्कयोः कृते

$b^{10} \div b^5 = b^{\square}$

$c^{100} \div c^{90} = c^{\square}$

व्यापकरूपेण कस्यचित् a इति शून्येतरपूर्णाङ्कस्य कृते

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

इति भवति यत्र m एवञ्च n इति पूर्णसङ्ख्ये स्तः अथ च m > n इति अस्ति।

प्रयासं कुर्वन्तु

सरलीकृत्य घाताङ्कीय-रूपेण लिख्यताम् -

(यथा- $11^6 \div 11^2 = 11^4$)

(i) $2^9 \div 2^3$

(ii) $10^8 \div 10^4$

(iii) $9^{11} \div 9^7$

(iv) $20^{15} \div 20^{13}$

(v) $7^{13} \div 7^{10}$

13.3.3 कस्यचित् घातस्य घातग्रहणम्

निम्नलिखितेषु विचारं कुर्वन्तु

$(2^3)^2$ तथा च $(3^2)^4$ इति सरलं कुरूत।

अधुना $(2^3)^2$ इत्यस्य अर्थः अस्ति यत् 2^3 इत्यस्य स्वयं द्वारा द्विवारं गुणनम्।

$$(2^3)^2 = 2^3 \times 2^3$$

$= 2^{3+3}$ (यतोहि $a^m \times a^n = a^{m+n}$)

$= 2^6 = 2^{3 \times 2}$

अर्थात् $(2^3)^2 = 2^{3 \times 2}$

अनेन प्रकारेण $(3^2)^4 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2$

$= 3^{2+2+2+2}$

$= 3^8$ (पश्यन्तु यत् 2 तथा च 4 इत्यनयोः गुणनफलम् 8 इति अस्ति।)

$= 3^{2\times 4}$

किं भवन्तः बोधयितुं शक्नुवन्ति यत् $(7^2)^{10}$ इति कस्य समानम् अस्ति ?

अतः
$$(2^3)^2 = 2^{3\times2} = 2^6$$
$$(3^2)^4 = 3^{2\times4} = 3^8$$
$$(7^2)^{10} = 7^{2\times10} = 7^{20}$$
$$(a^2)^3 = a^{2\times3} = a^6$$
$$(a^m)^3 = a^{m\times3} = a^{3m}$$

प्रयासं कुर्वन्तु

सरलीकृत्य उत्तरं घाताङ्कीयरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु।

(i) $(6^2)^4$ (ii) $(2^2)^{100}$

(iii) $(7^{50})^2$ (iv) $(5^3)^7$

उपर्युक्तवर्णनेन वयं व्यापकरूपेण एतद् वक्तुं शक्नुमः यत् कस्यचित् 'a' इति पूर्णाङ्कस्य कृते

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

इति भवति यत्र 'm' तथा च 'n' इति पूर्णसङ्ख्ये स्तः।

उदाहरणम् 7 किं भवन्तः सूचयितुम् अर्हन्ति यत् $(5)^2 \times 3$ तथा च $(5^2)^3$ इत्यनयोः मध्ये कः बृहत्तरः अस्ति ?

समाधानम् $(5^2)\times 3$ इत्यस्य अर्थः अस्ति यत् 5^2 इति 3 इत्यनेन गुणितं वर्तते अर्थात् एतत् $5 \times 5 \times 3 = 75$ इति अस्ति।

किन्तु $(5)^2$ इत्यस्य अर्थः अस्ति यत् 5^2 इत्यस्य स्वयं द्वारा त्रिवारं गुणनम् अस्ति अर्थात् एतत्

$5^2 \times 5^2 \times 5^2 = 5^6 = 15{,}625$ इति अस्ति।

अतः $(5^2)^3 > (5^2)x3$ इति।

13.3.4 समानघाताङ्क-घातानां गुणनम्

किं भवन्तः $2^3 \times 3^3$ इति सरलं कर्तुं शक्नुवन्ति ? अवधानं कुर्वन्तु यत् अत्र 2^3 एवञ्च 3^3 इत्यनयोः उभयोः पदयोः आधारः भिन्नः अस्ति। किन्तु घाताङ्कौ समानौ स्तः।

इदानीम् $2^3 \times 3^3 = (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= 6 \times 6 \times 6$

$= 6^3$ (पश्यन्तु यत् 2 एवञ्च 3 इत्यनयोः आधारयोः गुणनफलम् 6 अस्ति।)

पश्यन्तु $4^4 \times 3^4 = (4 \times 4 \times 4 \times 4) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$= (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3)$

$= 12 \times 12 \times 12 \times 12$

$= 12^4$

सममेव पश्यन्तु $\quad 3^2 \times a^2 = (3 \times 3) \times (a \times a)$

$= (3 \times a) \times (3 \times a)$

$= (3 \times a)^2$

$= (3a)^2$ (अवधानं यच्छन्तु $3{\times}a = 3a$)

अनेन प्रकारेण $\quad a^4 \times b^4 = (a \times a \times a \times a) \times (b \times b \times b \times b)$

$= (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b)$

$= (a \times b)^4$

$= (ab)^4$ (अवधानं यच्छन्तु यत् $a \times b = ab$ इति अस्ति)

व्यापकरूपेण कस्यचिदपि a इति शून्येतरपूर्णाङ्कस्य कृते $a^m + b^m = (ab)^m$ इति भवति यत्र m इति एका पूर्णसङ्ख्या अस्ति।

प्रयासं कुर्वन्तु

$a^m \times b^m = (ab)^m$ इति प्रयुज्य अन्यरूपेण परिवर्तयन्तु :

(i) $4^3 \times 2^3$ (ii) $2^5 \times b^5$

(iii) $a^2 \times t^2$ (iv) $5^6 \times (-2)^6$

(v) $(-2)^4 \times (-3)^4$

उदाहरणम् 8 अधोलिखित-पदानि घाताङ्कीयरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु:

(i) $(2 \times 3)^5$ (ii) $(2a)^4$ (iii) $(-4m)^3$

समाधानम्

(i) $(2 \times 3)^5 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$= 2^5 \times 3^5$

(ii) $(2a)^4 = 2a \times 2a \times 2a \times 2a$

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (a \times a \times a \times a)$

$= 2^4 \times a^4$

(iii) $(-4m)^3 = (-4 \times m)^3$

$= (-4 \times m) \times (-4 \times m) \times (-4 \times m)$

$= (-4) \times (-4) \times (-4) \times (m \times m \times m) = (-4)^3 \times (m)^3$

13.3.5 समानघाताङ्कैः घातैः विभजनम्

अधोलिखित-समीकरणानि पश्यन्तु :

(i) $\dfrac{2^4}{3^4} = \dfrac{2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^4$

(ii) $\dfrac{a^3}{b^3} = \dfrac{a\times a\times a}{b\times b\times b} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{a}{b} \times \dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^3$

एभिःउदाहरणैः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् व्यापकरूपेण

$a^m \div b^m = \dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ यत्र a एवञ्च b कौचित् द्वौ शून्येतर-पूर्णाङ्कौ स्तः

तथा च m इति एका पूर्णसङ्ख्या अस्ति।

प्रयासं कुर्वन्तु

$a^m \div b^m = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ इत्यस्य प्रयोगं कृत्वा अन्यस्मिन् रूपे परिवर्तयन्तु

(i) $4^5 \div 3^5$

(ii) $2^5 \div b^5$

(iii) $(-2)^3 \div b^3$

(iv) $p^4 \div q^4$

(v) $5^6 \div (-2)^6$

उदाहरणम् 9 प्रयासं कुरूत (i) $\left(\frac{3}{5}\right)^4$ (ii) $\left(\frac{-4}{7}\right)^5$

समाधानम्

(i) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{3\times3\times3\times3}{5\times5\times5\times5}$

(ii) $\left(\frac{-4}{7}\right)^5 = \frac{(-4)^5}{7} = \frac{(-4)\times(-4)\times(-4)\times(-4)\times(-4)}{7\times7\times7\times7\times7}$

- **शून्यघाताङ्काः सङ्ख्याः -**

किं भवन्तः निर्देशं कर्तुं शक्नुवन्ति यत् $\frac{3^5}{3^5}$ इति कस्य तुल्यम् अस्ति?

$\frac{3^5}{3^5} = \frac{3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3}$ इति अस्ति।

$3^5 \div 3^5 = 3^{5-5} = 3^0$ इति अस्ति। अतः $3^0 = 1$ इति अस्ति।

घाताङ्कीय-नियमानां प्रयोगं कुर्वन्तः किं भवन्तः सूचयितुं शक्नुवन्ति यत् 7^0 इति कस्य तुल्यम् अस्ति ?

$7^3 \div 7^3 = 7^{3-3} = 7^0$

सहैव $\frac{7^3}{7^3} = \frac{7\times7\times7}{7\times7\times7} = 1$ इति अस्ति।

अतः $7^0 = 1$

अनेन प्रकारेण $a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0$

सहैव $a^3 \div a^3 = \frac{a^3}{a^3} = \frac{a\times a\times a}{a\times a\times a} = 1$ इति अस्ति।

a^0 इति किम् अस्ति ?
अधोलिखित-प्रतिरूपाणि पश्यन्तु -

$2^6 = 64$

$2^5 = 32$

$2^4 = 16$

$2^3 = 8$

$2^2 = ?$

$2^1 = ?$

$2^0 = ?$

भवन्तः केवलमात्रं प्रतिरूपाणि वीक्ष्य एव 2^0 इत्यस्य मानस्य अनुमानं कर्तुं शक्नुवन्ति।
भवन्तः द्रष्टुम् अर्हन्ति यत् $2^0 = 1$ अस्ति
यदि $3^6 = 729$ इतः प्रारम्भं कुर्मः तदा पूर्व-दर्शितविधिना $3^5, 3^4, 3^3,...$ इत्यादि ज्ञातं कुर्वन्तः किं भवन्तः 3^0 इत्यस्य मानं वक्तुं शक्नुवन्ति ?

अतः $a^0 = 1$ (a इति कस्यचित् शून्येतरपूर्णाङ्कस्य कृते)
अतः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् कस्याञ्चित् शून्येतरायां सङ्ख्यायाम् 0 इति घातस्य (अथवा घाताङ्कस्य) मानम् 1 इति भवति।

13.4 घाताङ्क-नियमानानां विविधेषु उदाहरणेषु प्रयोगः

आगच्छन्तु उपरि विकसितनान् घाताङ्क-नियमानान् प्रयुज्य कानिचित् उदाहरणानि साधयामः।

उदाहरणम् 10 $8 \times 8 \times 8 \times 8$ कृते 2 इति आधारं स्वीकृत्य एतान् अङ्कान् घाताङ्कीयरूपेण लिखन्तु।

समाधानम् वयं जानीमः यत् $8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4$

परन्तु वयं जानीमः यत् $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

अतः $8^4 = (2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3$

$= 2^{3\times4}$ [भवन्तः $(a^m)^n = a^m$ इत्यस्य अपि प्रयोगं कर्तुं शक्नुवन्ति]

$= 2^{12}$

उदाहरणम् 11 सरलीकृत्य उत्तराणि घाताङ्कीय-रूपेण लिखन्तु :

(i) $\frac{3^7}{3^2} \times 3^5$ (ii) $2^3 \times 2^2 \times 5^5$ (iii) $(6^2 \times 6^4) \div 6^3$

(iv) $[(2^2)^3 \times 3^6] \times 5^6$ (v) $8^2 \div 2^3$

समाधानम्

(i) $\left(\frac{3^7}{3^2}\right) \times 3^5 = (3^{7-2}) \times 3^5$

$= 3^5 \times 3^5 = 3^{5+5} = 3^{10}$

(ii) $2^3 \times 2^2 \times 5^5 = 2^{3+2} \times 5^5$

$= 2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5$

(iii) $(6^2 \times 6^4) \div 6^3 = 6^{2+4} \div 6^3$

$= \frac{6^6}{6^3} = 6^{6-3} = 6^3$

(iv) $[(2^2)^3 \times 3^6] \times 5^6 = [2^6 \times 3^6] \times 5^6$

$= (2 \times 3)^6 \times 5^6$

$= (2 \times 3 \times 5)^6 = 30^6$

(v) $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

अतः $8^2 \div 2^3 = (2^3)^2 \div 2^3$

$= 2^6 \div 2^3 = 2^{6-3} = 2^3$

उदाहरणम् 12 सरलीकुरूत -

(i) $\frac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27}$ (ii) $2^3 \times a^3 \times 5a^4$ (iii) $\frac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2}$

समाधानम्

(i) अत्र $\frac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27} = \frac{(2^2 \times 3)^4 \times (3^2)^3 \times 2^2}{(2 \times 3)^3 \times (2^3)^2 \times 3^3}$

$= \frac{(2^2)^4 \times (3)^4 \times 3^{2 \times 3} \times 2^2}{2^3 \times 3^3 \times 2^{2 \times 3} \times 3^3} = \frac{2^8 \times 2^2 \times 3^4 \times 3^6}{2^3 \times 2^6 \times 3^3 \times 3^3}$

$= \frac{2^{8+2} \times 3^{4+6}}{2^{3+6} \times 3^{3+3}} = \frac{2^{10} \times 3^{10}}{2^9 \times 3^6}$

$= 2^{10-9} \times 3^{10-6} = 2^1 \times 3^4$

$= 2 \times 81 = 162$

(ii) $2^3 \times a^3 \times 5a^4 = 2^3 \times a^3 \times 5 \times a^4$

$= 2^3 \times 5 \times a^3 \times a^4 = 8 \times 5 \times a^{3+4}$

$= 40\ a^7$

(ii) $\frac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2} = \frac{2 \times 3^4 \times 2^5}{3^2 \times (2^2)^2} = \frac{2 \times 2^5 \times 3^4}{3^2 \times 2^{2 \times 2}}$

$$= \frac{2^{1+5}\times 3^4}{2^4\times 3^2} = \frac{2^6\times 3^4}{2^4\times 3^2} = 2^{6-4}\times 3^{4-2}$$

$$= 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$$

टिप्पणी अस्मिन् अध्याये अस्माभिः अधिकांशरूपेण तादृशानि उदाहरणानि स्वीकृतानि येषु आधारः कश्चन पूर्णाङ्कः अस्ति। परन्तु अस्य अध्यायस्य सर्वे परिणामाः तासां स्थितीनां कृते अपि प्रमाणिताः सन्ति यत्र आधारत्वेन परिमेयसङ्ख्याः सन्ति।

प्रश्नावली 13.2

1. घाताङ्कीय-नियमानां प्रयोगं कुर्वन्तः अधोलिखितान् सरलीकुर्वन्तु तथा च उत्तरं घाताङ्कीय-रूपेण लिखन्तु -

   (i) $3^2 \times 3^4 \times 3^8$ (ii) $6^{15} \div 6^{10}$ (iii) $a^3 \times a^2$ (iv) $7^x\times 7^2$

   (v) $(5^2)^3\div 5^3$ (vi) $2^5 \times 5^5$ (vii) $a^4 \times b^4$ (viii) $(3^4)^3$

   (ix) $(2^{20}\div 2^{15})\times 2^3$ (x) $8^t\div 8^2$

2. अधोलिखितेषु एकैकं सरलीकृत्य घाताङ्कीय-रूपेण व्यक्तीकुरूत -

   (i) $\frac{2^3\times 3^4\times 4}{3\times 32}$ (ii) $[(5^2)^3\times 5^4]\div 5^7$ (iii) $25^4 \div 5^3$

   (iv) $\frac{3\times 7^2\times 11^8}{21\times 11^3}$ (v) $\frac{3^7}{3^4\times 3^3}$ (vi) $2^0 + 3^0 + 4^0$

   (vii) $2^0 \times 3^0 \times 4^0$ (viii) $(3^0+2^0) \times 5^0$ (ix) $\frac{2^8\times a^5}{4^3\times a^3}$

   (x) $\frac{a^5}{a^3} \times a^8$ (xi) $\frac{4^5 \times a^8 b^3}{4^5 \times a^5 b^2}$ (xii) $(2^3\times 2)^2$

3. अधोलिखित-कथनानि सत्यानि असत्यानि वा इति सूचयन्तु सकारणं च स्व-उत्तरं यच्छन्तु -

   (i) $10 \times 10^{11} = 100^{11}$ (ii) $2^3>5^2$

   (iii) $2^3 \times 3^2 = 6^5$ (iv) $3^0 = (1000)^0$

4. अधोलिखितेषु एकैकं केवलम् अभाज्य-गुणनखण्डानां घातीय-गुणनफलरूपेण व्यक्तं कुरूत -

   (i) 108×192 (ii) 270 (iii) 729×64 (iv) 768

5. सरलीकुरूत -

   (i) $\frac{(2^5)^2\times 7^3}{8^3\times 7}$ (ii) $\frac{25\times 5^2\times t^8}{10^3\times t^4}$ (iii) $\frac{3^5\times 10^2\times 25}{5^7\times 6^5}$

13.5 दशमानसङ्ख्या-पद्धतिः

आयान्तु, 47561 इत्यस्य अधोलिखितं प्रसारं पश्यामः येन सह वयं पूर्वमेव परिचिताः स्मः -

$$47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$$

वयम् 10 इत्यस्य घातानां प्रयोगं कुर्वन्तः घाताङ्कीय-रूपेण अधोलिखितप्रकारेण व्यक्तीकर्तुं शक्नुमः -

अतः $47561 = 4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 1 \times 10^0$

(अवधानं कुर्वन्तु - 10,000 $=10^4$, 1000 $=10^3$, 100 $=10^2$, 10 $= 10^1$ तथा च 1 $=10^0$)

आयान्तु अन्याम् एकां सङ्ख्यां प्रसारित-रूपेण लिखामः

$$\begin{aligned} 104278 &= 1 \times 100,000 + 0 \times 10,000 + 4 \times 1000 + 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8 \times 1 \\ &= 1 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0 \\ &= 1 \times 10^5 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0 \end{aligned}$$

अवधानं यच्छन्तु यत् केन प्रकारेण 10 इत्यस्य घाताङ्काः 5 इति अधिकतममानात् आरम्भमाणाः एकैकशः व्यवकल्यमानाः (घाताङ्काः) शून्यपर्यन्तम् (0) आगच्छन्ति ।

13.6 बृहत्सङ्ख्यानां मानकरूपेण व्यक्तीकरणम्

आयान्तु, अस्य अध्यायस्य प्रारम्भिकस्थितिं प्रत्यागच्छामः । अस्माभिः उक्तम् आसीत् यत् दीर्घ-सङ्ख्याः घाताङ्कानां प्रयोगं कृत्वा सौविध्येन व्यक्तीकर्तुं शक्यन्ते । अस्माभिः एतावत् पर्यन्तम् एतत् न दर्शितम् आसीत् । सम्प्रति वयम् एतत् करिष्यामः ।

1. सूर्यः अस्माकम् आकाशगङ्गायाः केन्द्रात् 300,000,000,000,000,000,000 मीटरपरिमित-दूरे अस्ति ।
2. अस्माकम् आकाशगङ्गायाम् (100,000,000,000) एकनिखर्वं तारकाः सन्ति ।
3. पृथिव्याः द्रव्यमानम् 5,976,000,000,000,000,000,000,000 किलोग्रामपरिमितम् अस्ति ।

प्रयासं कुर्वन्तु

10 इत्यस्य घातानां प्रयोगं कुर्वन्तः अधोलिखितसङ्ख्यानां घाताङ्कीय-रूपेण प्रसारणं कुर्वन्तु

(i) 172

(ii) 5,643

(iii) 56,439

(iv) 1,76,428

इमाः सङ्ख्याः पठन-लेखनदृष्ट्या सरलाः न सन्ति । वयं इमाः सङ्ख्याः सरलीकर्तुं वयं घातानाम् अथवा घाताङ्कानां प्रयोगं कुर्मः ।

अधोलिखिताः सङ्ख्याः पश्यन्तु

$59 = 5.9 \times 10 = 5.9 \times 10^1$

$590 = 5.9 \times 100 = 5.9 \times 10^2$

$5900 = 5.9 \times 1000 = 5.9 \times 10^3$

$59000 = 5.9 \times 10000 = 5.9 \times 10^4$ इत्यादयः।

अस्माभिः इमाः सर्वाः सङ्ख्याः **मानकरूपेण व्यक्तीकृताः** । काचिद् अपि सङ्ख्या 1.0 एवञ्च 10.0 एतन्मध्यस्थेन दशमानसङ्ख्यारूपेण तथा च दशैः गुणितः (1.0 इति अपि सम्मिलिता अस्ति) सङ्ख्यायाः इदं रूपं तस्याः **मानकरूपम्** इति कथ्यते । अनेन प्रकारेण

$5,985 = 5.985 \times 1,000 = 5.985 \times 10^3$ इति 5,985 इत्यस्याः सङ्ख्यायाः मानकरूपम् अस्ति ।

अवधानं कुर्वन्तु यत् 5,985 इति सङ्ख्या 59.85×100 अथवा 59.85×10^2 इत्यनेन रूपेण अपि व्यक्तीकर्तुं शक्यते । परन्तु इदम् 5,985 इत्यस्याः सङ्ख्यायाःमानकरूपं नास्ति । अनेन प्रकारेण $5,985 = 0.5985 \times 10,000 = 0.5985 \times 10^4$ इति अपि 5,985 इत्यस्याः मानकरूपं नास्ति ।

अधुना वयम् अस्य अध्यायस्य प्रारम्भे आगताः सङ्ख्याः अनेन मानकरूपेण व्यक्तीकर्तुं सक्षमाः संजाताः स्मः ।

अस्माकम् आकाशगङ्गायाः केन्द्रात् सूर्यस्य 300,000,000,000,000,000,000 मीटरमितम् अन्तरालम् $3.0 \times 100,000,000,000,000,000,000 = 3.0 \times 10^{20}$ मीटरमितम् इत्यनेन रूपेण लेखितुं शक्नुमः ।

किम् अधुना भवन्तः 40,000,000,000 इत्येतां सङ्ख्याम् अपि अनेन एव रूपेण व्यक्तीकर्तुं शक्नुवन्ति ?

अस्यां सङ्ख्यायां शून्यानि गणयन्तु तानि च 10 इति सन्ति ।

अतः $\quad 40,000,000,000 = 4.0 \times 10^{10}$

पृथिव्याः द्रव्यमानम् $=$ 5,976,000,000,000,000,000,000,000 किलोग्रामः

$= 5.976 \times 10^{24}$ किलोग्रामपरिमितम् अस्ति ।

किं भवन्तः अस्य तथ्यस्य समर्थनं कुर्वन्ति यत् पठन-अधिगमन-तुलनादृष्ट्या मानकरूपेण लिखिता इयं सङ्ख्या तस्याः पञ्चविंशत्यङ्कात्मक-सङ्ख्यायाः अपेक्षया अतीव सरला सुगमा च अस्ति ?

अधुना अरूणग्रहस्य द्रव्यमानम् = 86,800,000,000,000,000,000,000,000 किलोग्रामपरिमितम्
$= 8.68 \times 10^{25}$ किलोग्रामपरिमितम् अस्ति।

उपर्युक्तयोः व्यञ्जकयोः केवलमात्रम् 10 इत्यस्य घातानां तुलनां कृत्वा एव भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् सूर्यस्य द्रव्यमानं पृथिव्याः द्रव्यमानाद् अधिकम् अस्ति।

शनिसूर्ययोः मध्ये विद्यमानः अन्तरालः 1,433,500,000,000 मीटरमितः अथवा 1.4335×10^{12} मीटरमितः अस्ति। युरेनस्शन्योः मध्ये विद्यमानः अन्तरालः 1,439,000,000,000 मीटरमितः अथवा 1.439×10^{12} मीटरमितः अस्ति। सूर्यपृथ्व्योः मध्ये अन्तरालः 149, 600,000,000 मीटरमितः अथवा 1.496×10^{11} मीटरमितः वर्तते।

किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् एषु त्रिषु अन्तरालेषु कतमः अन्तरालः न्यूनतमः अस्ति ?

उदाहरणम् 13 अधोलिखितसङ्ख्याः मानकरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु :

(i) 5985.3 (ii) 65,950

(iii) 3,430,000 (iv) 70,040,000,000

समाधानम्

(i) $5985.3 = 5.9853 \times 1000 = 5.9853 \times 10^3$

(ii) $65,950 = 6.595 \times 10,000 = 6.595 \times 10^4$

(iii) $3,430,000 = 3.43 \times 1,000,000 = 3.43 \times 10^6$

(iv) $70,040,000,000 = 7.004 \times 10,000,000,000 = 7.004 \times 10^{10}$

अत्र अवधातव्यः अंशः एषः अस्ति यत् दशमानबिन्दुतः वामभागीयाम् अङ्कसङ्ख्यां गणयित्वा तस्यां संख्यायाम् एकं व्यवकलय्य यत् प्राप्यते तद् एव 10 इत्यस्य घाताङ्कः भवति यत् मानकरूपेण प्रयुज्यते। वयम् अस्य बिन्दोः कल्पनां सङ्ख्यायाः दक्षिणभागे कुर्मः। अत्र वामदिशं प्रति अङ्कानां सङ्ख्या 11 अस्ति। अतः मानकरूपेण व्यक्तीकर्तुम् 11 इत्यस्य घाताङ्कः $11 – 1 = 10$ इति अस्ति। अतः 5985.3 इति सङ्ख्यायां दशमान-बिन्दोः वामभागे चत्वारः अङ्काः सन्ति इति कारणेन मानकरूपेण 10 इत्यस्य घाताङ्कः $4-1 =3$ अस्ति।

प्रश्नावली 13.3

1. अधोलिखित-सङ्ख्याः प्रसारितरूपेण लिखन्तु
   279404, 3006194, 2806196, 120719, 20068
2. अधोलिखितेषु प्रसारितरूपेषु एकैकस्य कृते सङ्ख्यां ज्ञातुं प्रयासं कुर्वन्तु
   (a) $8 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$
   (b) $4 \times 10^5 + 5 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10^0$
   (c) $3 \times 10^4 + 7 \times 10^2 + 5 \times 10^0$
   (d) $9 \times 10^5 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1$
3. अधोलिखित-सङ्ख्याः मानकरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु
   (i) 5,00,00,000 (ii) 70,00,000 (iii) 3,18,65,00,000

(iv) 3,90,878 (v) 39087.8 (vi) 3908.78

4. अधोलिखित-कथनेषु आगम्यमानाः सङ्ख्याः मानकरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु
   (a) पृथ्वीचन्द्रमसोः मध्ये विद्यमानः अन्तरालः 384,000,000 मीटरमितः अस्ति।
   (b) निर्वात-स्थाने प्रकाशस्य वेगः प्रतिक्षणम् 300,000,000 मीटरमित्या अस्ति
   (c) भूमेः व्यासः 1,27, 56,000 मीटरमितः अस्ति।
   (d) सूर्यस्य व्यासः 1,400,000,000 मीटरमितः अस्ति।
   (e) एकस्याम् आकाशगङ्गायां मध्यमानेन 100,000,000,000 तारकाः सन्ति।
   (f) सौरमण्डलम् 12,000,000,000 वर्षपुरातनम् आकलितम्।
   (g) आकाशागङ्गायाः केन्द्रात् सूर्यस्य अन्तरालः 300,000,000,000,000,000,000 मीटरमितः आकलितः अस्ति।
   (h) 1.8 मितग्रामभारयुते कस्मिंश्चिद् जलबिन्दौ 60,230,000,000,000,000,000,000 मिताः अणवः भवन्ति।
   (i) पृथिव्याम् 1,353,000,000km^3 मितं सामुद्रिकजलम् अस्ति।
   (j) 2001 तमे वर्षे मार्चमासे भारतस्य जनसङ्ख्या 1,027,000,000 आसीत्।

अस्माभिः का चर्चा कृता ?

1. बृहत्तमाः सङ्ख्याः पठनम्, अवगमनम्, तोलनम् अथ च सङ्क्रिया इत्येषां दृष्ट्या कठिनाः भवन्ति । वयम् इमाः बृहत्तम-सङ्ख्याः सरलीकर्तुं घाताङ्कं प्रयुज्य सङ्क्षिप्तरूपेण लिखामः।
2. कासाञ्चित् सङ्ख्यानां घाताङ्कीय-रूपाणि अधोलिखितानि सन्ति :
   $10,000 = 10^4$ (एतत् 10 इत्यस्य उपरि घातः 4 इति रूपेण पठ्यते।)
   $243 = 3^5$, $128 = 2^7$
   अत्र 10, 3 एवञ्च 2 इति आधाराः सन्ति तथा च 4, 5 एवञ्च 7 इति क्रमशः एतेषां घाताङ्काः सन्ति। वयम् एतद् अपि वक्तुं शक्नुमः यत् 10 इत्यस्य चतुर्थः घातः 10,000 इति अस्ति , 3 इत्यस्य पञ्चमः घातः 243 इति अस्ति इत्यादि।
3. अधः केचन नियमाः लिखिताः सन्ति येषां घाताङ्कीयरूपेण सङ्ख्यानां लेखने आवश्यकता वर्तते - a तथा च b इति कयोश्चित् शून्येतर-पूर्णाङ्कयोः कृते अथ च m एवञ्च n इति पूर्णसङ्ख्ययोः कृते
   (a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$
   (b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$, $m > n$
   (c) $(a^m)^n = a^{mn}$
   (d) $a^m \times b^m = (ab)^m$
   (e) $a^m \div b^n = (a/b)^m$
   (f) $a^0 = 1$
   (g) $(-1)^{\text{समसङ्ख्या}} = 1$
   $(-1)^{\text{विषमसङ्ख्या}} = -1$